Metoda wielomianowa w rozwiązywaniu równania różniczkowego jednorodnego rzędu dwa.

Zbigniew Jan Stebel

Zadanie

Znaleźć dwa rozwiązania równania

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 2y = 0$

Rozwiązanie:

Połóżmy $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Obliczmy kolejno dwie pochodne wielomianu y

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)t^{n-2}$$

Podstawiając wielomian y i jego pochodne do równania (1) otrzymamy:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Porównując wyrazy przy odpowiednich potęgach otrzymujemy

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2(n+1)a_n,$$

skąd

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}.$$

Współczynniki a_n są określone tą rekurencją w sposób jednoznaczny, gdy znamy a_0 i a_1.

Wiemy, że $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, skąd

$$\begin{cases} y'(0) = a_1, \\ y(0) = a_0. \end{cases}$$

Różne rozwiązania y_1, y_2 otrzymamy kładąc różne wartości a_1, a_0.

<u>Podstawienie pierwsze.</u>

$a_0 = 1; a_1 = 0.$

W tym przypadku $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0,$ zatem wyrazy nieparzyste są równe 0.

Z drugiej strony

$a_2 = a_0 = 1$

$$a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{1}{6}$$

....

$$a_{2n} = \frac{1}{n!}$$

Stąd $y_1(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = e^{t^2}$

<u>Podstawienie drugie</u>

$a_0 = 0; a_1 = 1$

W tym przypadku

$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0,$ czyli wyrazy parzyste są równe 0.

$$a_3 = \frac{2a_1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = \frac{2a_3}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$a_7 = \frac{2a_5}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

....

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

więc drugie rozwiązanie przyjmuje postać

$$y_2(t) = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2^2 t^5}{3 \cdot 5} + \frac{2^3 t^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

Odpowiedź:

Funkcja $y_1(t)$ jest rozwiązaniem równania (1) z warunkami początkowymi $y'(0) = 0, y(0) = 1,$ zaś funkcja $y_2(t)$ jest rozwiązaniem tego samego równania z warunkami początkowymi $y'(0) = 1, y(0) = 0.$